

СОДЕРЖАНИЕ

1. Числа и вычисления 6	
1.1. Натуральные числа 6	
1.1.1. Десятичная система счисления. Римская нумерация 6	
1.1.2. Арифметические действия над натуральными числами 7	
1.1.3. Степень с натуральным показателем 7	
1.1.4. Делимость натуральных чисел. Простые и составные числа. Разложение натурального числа на простые множители 8	
1.1.5. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10..... 9	
1.1.6. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное 10	
1.1.7. Деление с остатком 12	
1.2. Дроби 12	
1.2.1. Обыкновенная дробь, основное свойство дроби. Сравнение дробей..... 12	
1.2.2. Арифметические действия с обыкновенными дробями..... 14	
1.2.3. Нахождение части от целого и целого по его части 16	
1.2.4. Десятичная дробь, сравнение десятичных дробей..... 18	
1.2.5. Арифметические действия с десятичными дробями..... 19	
1.2.6. Представление десятичной дроби в виде обыкновенной и обыкновенной в виде десятичной 21	
1.3. Рациональные числа..... 21	
1.3.1. Целые числа..... 21	
1.3.2. Модуль (абсолютная величина) числа 22	
1.3.3. Сравнение рациональных чисел..... 23	
1.3.4. Арифметические действия с рациональными числами 24	
1.3.5. Степень с целым показателем..... 26	
1.3.6. Числовые выражения, порядок действий в них, использование скобок. Законы арифметических действий 27	
1.4. Действительные числа 29	
1.4.1. Квадратный корень из числа..... 29	
1.4.2. Корень третьей степени 32	
1.4.3. Нахождение приближенного значения корня с помощью калькулятора 33	
1.4.4. Запись корней с помощью степени с дробным показателем..... 34	
1.4.5. Понятие об иррациональном числе. Десятичные приближения иррациональных чисел. Действительные числа как бесконечные десятичные дроби..... 37	
1.4.6. Сравнение действительных чисел..... 38	
1.5. Измерения, приближения, оценки 39	
1.5.1. Единицы измерения длины, площади, объема, массы, времени, скорости 39	
1.5.2. Размеры объектов окружающего мира (от элементарных частиц до Вселенной), длительность процессов в окружающем мире..... 41	
1.5.3. Представление зависимости между величинами в виде формул 42	
1.5.4. Проценты. Нахождение процента от величины и величины по ее проценту 43	
1.5.5. Отношение, выражение отношения в процентах..... 46	
1.5.6. Пропорция. Пропорциональная и обратно пропорциональная зависимость 48	
1.5.7. Округление чисел. Прикидка и оценка результатов вычислений. Выделение множителя-степени десяти в записи числа..... 51	
Тренировочные тестовые задания к разделу 1 53	
2. Алгебраические выражения 55	
2.1. Буквенные выражения (выражения с переменными) 55	
2.1.1. Буквенные выражения. Числовое значение буквенного выражения 55	
2.1.2. Допустимые значения переменных, входящих в алгебраические выражения..... 56	
2.1.3. Подстановка выражений вместо переменных..... 57	
2.1.4. Равенство буквенных выражений, тождество. Преобразования выражений..... 59	
2.2. Степень с целым показателем 60	
2.2.1. Свойства степени с целым показателем 60	
2.3. Многочлены 61	
2.3.1. Многочлен. Сложение, вычитание, умножение многочленов 61	
2.3.2. Формулы сокращенного умножения: квадрат суммы и квадрат разности; формула разности квадратов суммы и разности кубов..... 62	
2.3.3. Разложение многочлена на множители..... 64	
2.3.4. Квадратный трехчлен. Теорема Виета. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители..... 67	
2.3.5. Степень и корень многочлена с одной переменной..... 69	
2.4. Алгебраическая дробь..... 70	
2.4.1. Алгебраическая дробь. Сокращение дробей 70	
2.4.2. Действия с алгебраическими дробями 71	
2.4.3. Рациональные выражения и их преобразования 74	
2.5. Квадратный корень из числа 75	

2.5.1. Свойства квадратных корней и их применение в вычислениях	75	4.2.4. Формула суммы первых членов геометрической прогрессии. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия	159
Тренировочные тестовые задания к разделу 2	78	4.2.5. Сложные проценты	162
3. Уравнения и неравенства	80	Тренировочные тестовые задания к разделу 4	165
3.1. Уравнения	80	5. Функции	167
3.1.1. Уравнения с одной переменной, корень уравнения	80	5.1. Числовые функции	167
3.1.2. Линейное уравнение	81	5.1.1. Понятие функции. Область определения функции. Способы задания функции	167
3.1.3. Квадратное уравнение. Формула корней квадратного уравнения	84	5.1.2. График функции, возрастание и убывание функции, наибольшее и наименьшее значения функции, нули функции, промежутки знакопостоянства. Чтение графиков функции	170
3.1.4. Решение рациональных уравнений. Решение иррациональных уравнений	86	5.1.3. Примеры графических зависимостей, отражающих реальные процессы	174
3.1.5. Примеры решения уравнений высших степеней. Решение уравнений методом замены переменной. Решение уравнений методом разложения на множители	89	5.1.4. Функция, описывающая прямую пропорциональную зависимость, ее график	176
3.1.6. Уравнение с двумя переменными. Решение уравнений с двумя переменными	92	5.1.5. Линейная функция, ее график, геометрический смысл коэффициентов	179
3.1.7. Система уравнений; решение системы уравнений с двумя переменными	95	5.1.6. Функция, описывающая обратно пропорциональную зависимость. Гипербола	182
3.1.8. Система двух линейных уравнений с двумя переменными: решение подстановкой и алгебраическим сложением	97	5.1.7. Квадратичная функция, ее график. Парабола. Координаты вершины параболы, ось симметрии	185
3.1.9. Уравнения и системы уравнений с несколькими переменными (уравнения в целых числах)	101	5.1.8. График функции $y = \sqrt{x}$	190
3.1.10. Решение простейших нелинейных систем уравнений с двумя переменными	103	5.1.9. График функции $y = \sqrt[3]{x}$	192
3.2. Неравенства	110	5.1.10. График функции $y = x $	193
3.2.1. Числовые неравенства и их свойства	110	5.1.11. Использование графиков функций для решения уравнений и систем	195
3.2.2. Неравенство (линейное) с одной переменной. Решение неравенства	113	Тренировочные тестовые задания к разделу 5	199
3.2.3. Линейные неравенства с одной переменной и сводящиеся к ним	115	6. Координаты на прямой и плоскости	201
3.2.4. Системы линейных неравенств. Совокупности неравенств	118	6.1. Координатная прямая	201
3.2.5. Квадратные неравенства. Метод интервалов	124	6.1.1. Изображение чисел точками координатной прямой	201
3.3. Текстовые задачи	131	6.1.2. Геометрический смысл модуля	203
3.3.1. Решение текстовых задач арифметическим способом	131	6.1.3. Числовые промежутки: интервал, отрезок, луч	204
3.3.2. Решение текстовых задач алгебраическим способом	137	6.2. Декартовы координаты на плоскости	207
Тренировочные тестовые задания к разделу 3	148	6.2.1. Декартовы координаты на плоскости. Координаты точки	207
4. Числовые последовательности	150	6.2.2. Координаты середины отрезка	208
4.1.1. Понятие последовательности	150	6.2.3. Формула расстояния между двумя точками плоскости	210
4.2. Арифметическая и геометрическая прогрессии	152	6.2.4. Уравнение прямой, угловой коэффициент прямой, условие параллельности прямых	211
4.2.1. Арифметическая прогрессия. Формула общего члена арифметической прогрессии	152	6.2.5. Уравнение окружности	215
4.2.2. Формула суммы первых нескольких членов арифметической прогрессии	155	6.2.6. Графическая интерпретация уравнений с двумя переменными и их систем	218
4.2.3. Геометрическая прогрессия. Формула общего члена геометрической прогрессии	157	6.2.7. Графическая интерпретация неравенств с двумя переменными и их систем	221
		Тренировочные тестовые задания к разделу 6	225

7. Геометрия	227	7.4.2. Взаимное расположение прямой и окружности, двух окружностей	290
7.1. Геометрические фигуры и их свойства.		7.4.3. Касательная и секущая к окружности, равенство отрезков касательных, проведенных из одной точки.....	293
Измерение геометрических величин.....	227	7.4.4. Окружность, вписанная в треугольник.....	296
7.1.1. Начальные понятия геометрии	227	7.4.5. Окружность, описанная около треугольника.....	298
7.1.2. Угол. Прямой угол. Острые и тупые углы. Вертикальные и смежные углы. Биссектриса угла и ее свойства.....	231	7.4.6. Вписанные и описанные окружности правильного многоугольника	301
7.1.3. Прямая. Параллельность и перпендикулярность прямых.....	233	7.5. Измерения геометрических величин	303
7.1.4. Отрезок. Свойство серединного перпендикуляра к отрезку. Перпендикуляр и наклонная к прямой.....	237	7.5.1. Длина отрезка, длина ломаной, периметр многоугольника. Расстояние от точки до прямой	303
7.1.5. Понятие о геометрическом месте точек	239	7.5.2. Длина окружности	305
7.1.6. Преобразование плоскости. Движение. Симметрия.....	241	7.5.3. Градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной дуги окружности.....	306
7.2. Треугольник	244	7.5.4. Площадь и ее свойства. Площадь прямоугольника.....	308
7.2.1. Высота, медиана, биссектриса, средняя линия треугольника; точки пересечения серединных перпендикуляров, биссектрис, медиан, высот или их продолжений.....	244	7.5.5. Площадь параллелограмма	310
7.2.2. Равнобедренный и равносторонний треугольники. Свойства и признаки равнобедренного треугольника	246	7.5.6. Площадь трапеции	311
7.2.3. Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора.....	250	7.5.7. Площадь треугольника	314
7.2.4. Признаки равенства треугольников.....	253	7.5.8. Площадь круга. Площадь сектора.....	317
7.2.5. Неравенство треугольника	255	7.5.9. Формулы объема прямоугольного параллелепипеда, куба, шара	319
7.2.6. Сумма углов треугольника. Внешние углы треугольника	256	7.6. Векторы на плоскости	321
7.2.7. Зависимость между величинами сторон и углов треугольника	258	7.6.1. Вектор, длина (модуль) вектора.....	321
7.2.8. Теорема Фалеса	259	7.6.2. Равенство векторов	322
7.2.9. Подобие треугольников, коэффициент подобия. Признаки подобия треугольников	261	7.6.3. Операции над векторами (сумма векторов, умножение вектора на число).....	323
7.2.10. Синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника и углов от 0° до 180°	265	7.6.4. Угол между векторами	327
7.2.11. Решение прямоугольных треугольников. Теорема синусов и теорема косинусов.....	269	7.6.5. Коллинеарные векторы. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам.....	329
7.3. Многоугольники	273	7.6.6. Координаты вектора.....	330
7.3.1. Параллелограмм, его свойства и признаки.....	273	Тренировочные тестовые задания к разделу 7.....	332
7.3.2. Прямоугольник, квадрат, ромб, их свойства и признаки	276	8. Статистика и теория вероятностей	335
7.3.3. Трапеция. Средняя линия трапеции; равнобедренная трапеция.....	279	8.1. Описательная статистика	335
7.3.4. Сумма углов выпуклого многоугольника	283	8.1.1. Представление данных в виде таблиц, диаграмм, графиков	335
7.3.5. Правильные многоугольники	285	8.1.2. Среднее результатов измерений	338
7.4. Окружность и круг	287	8.2. Вероятность.....	340
7.4.1. Центральный, вписанный угол, величина вписанного угла.....	287	8.2.1. Частота события, вероятность	340
		8.2.2. Равновозможные события и подсчет их вероятности.....	341
		8.2.3. Представление о геометрической вероятности.....	345
		8.3. Комбинаторика	347
		8.3.1. Решение комбинаторных задач: перебор вариантов, комбинаторное правило умножения	347
		Тренировочные тестовые задания к разделу 8.....	350
		Ответы	352

1. Числа и вычисления

- Знать:**
- определение натуральных, целых, рациональных, действительных чисел;
 - признаки делимости на 2, 3, 5, 9 и 10;
 - единицы измерения различных величин;
 - зависимости между величинами в виде формул;
 - отношения, пропорции, проценты;
 - определения квадратного и кубического корня из числа.
- Уметь:**
- выполнять арифметические действия над рациональными числами;
 - переходить от одной формы записи чисел к другой;
 - округлять целые числа и десятичные дроби, находить приближения чисел, выполнять оценку результата;
 - решать текстовые задачи, связанные с отношением, пропорциональностью величин, дробями, процентами;
 - выполнять преобразование выражений, содержащих квадратный и кубический корень из чисел.

1.1. Натуральные числа

1.1.1. Десятичная система счисления. Римская нумерация

Натуральными называют числа, которые используются для счета предметов — 1, 2, 3, 4, ... (число 0 не является натуральным).

Множество натуральных чисел обозначают \mathbb{N} .

Запись « $3 \in \mathbb{N}$ » означает, что число три принадлежит множеству натуральных чисел, а запись « $0 \notin \mathbb{N}$ » означает, что число нуль не принадлежит этому множеству.

Десятичная система счисления — позиционная система счисления по основанию 10.

Целое число A в десятичной системе счисления записывается в виде конечной линейной комбинации степеней числа 10.

$$A = a_{n-1}a_{n-2}\dots a_2a_1a_0 = a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0,$$

где $a_{n-1}\dots a_0$ — цифры числа, причем $a_{n-1} \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Пример 1. $5783 = 5 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 3 \times 10^0$.

В римской нумерации цифры записывают с помощью букв латинского алфавита:

1 — I	8 — VIII
2 — II	9 — IX
3 — III	10 — X
4 — IV	50 — L
5 — V	100 — C
6 — VI	500 — D
7 — VII	1000 — M

Пример 2. Записать числа, используя римскую нумерацию.

222 — CCXXII;

545 — DXLV;

444 — CDXLIV;

689 — DCLXXXIX;

555 — DLV;

1145 — MCXLV.

1.1.2. Арифметические действия над натуральными числами

Для натуральных чисел определены следующие действия: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня.

Первые четыре действия являются арифметическими.

Пусть a , b и c — натуральные числа.

Законы сложения	Равенство
Переместительный	$a + b = b + a$
Сочетательный	$(a + b) + c = a + (b + c)$
Законы умножения	Равенство
Переместительный	$ab = ba$
Сочетательный	$(ab) \cdot c = a \cdot (bc)$

Распределительный закон: $a(b + c) = ab + ac$.

Действия с нулем и единицей

$$a + 0 = a$$

$$a : 1 = a$$

$$0 : a = 0$$

$$a \cdot 0 = 0$$

$$a : a = 1$$

~~$a \cdot 0$~~ — на 0 делить нельзя

Пример 1. Используя законы сложения и умножения, вычислить устно значения выражений:

а) $2 \cdot 137 \cdot 5$;

г) $73 \cdot 17 + 27 \cdot 17$;

б) $125 \cdot 77 \cdot 8$;

д) $4 \cdot 63 + 4 \cdot 79 + 142 \cdot 6$.

в) $25 \cdot 2 \cdot 136 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 4$;

Решение:

а) $2 \cdot 137 \cdot 5 = (2 \cdot 5) \cdot 137 = 10 \cdot 137 = 1370$;

б) $125 \cdot 77 \cdot 8 = 77 \cdot (125 \cdot 8) = 77 \cdot 1000 = 77\,000$;

в) $25 \cdot 2 \cdot 136 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 4 = (25 \cdot 4) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (136 \cdot 10) = 100 \cdot 10 \cdot 1360 = 1\,360\,000$;

г) $73 \cdot 17 + 27 \cdot 17 = 17 \cdot (73 + 27) = 17 \cdot 100 = 1700$;

д) $4 \cdot 63 + 4 \cdot 79 + 142 \cdot 6 = 4 \cdot (63 + 79) + 142 \cdot 6 = 4 \cdot 142 + 142 \cdot 6 = 142 \times (4 + 6) = 142 \cdot 10 = 1420$.

1.1.3. Степень с натуральным показателем

Степенью числа a с натуральным показателем n , большим 1, называется произведение n множителей, каждый из которых равен a :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}$$

где a — основание степени, n — показатель степени.

Степенью числа a с показателем 1 является само число a .
 Вычисление значения степени называют действием **возведение в степень**.
Свойства степени с натуральным показателем ($m \in \mathbb{N}$; $n \in \mathbb{N}$)

Свойства	Примеры
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32$
$a^m : a^n = a^{m-n}$; $m > n$, $a \neq 0$	$7^4 : 7^3 = 7^1 = 7$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6 = 729$
$(ab)^n = a^n \cdot b^n$	а) $(2a)^7 = 2^7 \cdot a^7 = 128a^7$; б) $2^5 \cdot 5^5 = (2 \cdot 5)^5 = 10^5 = 100\,000$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; $b \neq 0$	а) $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}$; б) $\frac{125^3}{25^3} = \left(\frac{125}{25}\right)^3 = 5^3 = 125$

► **Пример 1.** Вычислить: $\frac{17^9 \cdot 2^{12} \cdot 5^6}{17^8 \cdot 5^4 \cdot 2^{10}}$.

Решение:

$$\begin{aligned} \frac{17^9}{17^8} \cdot \frac{2^{12}}{2^{10}} \cdot \frac{5^6}{5^4} &= 17^{9-8} \cdot 2^{12-10} \cdot 5^{6-4} = 17 \cdot 2^2 \cdot 5^2 = 17 \cdot (2 \cdot 5)^2 = \\ &= 17 \cdot 10^2 = 17 \cdot 100 = 1700. \end{aligned}$$

► **Пример 2.** Найти значение выражения: $\frac{6^{2n} \cdot 4^2}{9^n \cdot 2^{2(n+2)}}$.

Решение:

$$\frac{6^{2n} \cdot 4^2}{9^n \cdot 2^{2(n+2)}} = \frac{(3 \cdot 2)^{2n} \cdot 16}{(3^2)^n \cdot 2^{2n+4}} = \frac{3^{2n} \cdot 2^{2n} \cdot 16}{3^{2n} \cdot 2^{2n} \cdot 2^4} = \frac{16}{16} = 1.$$

1.1.4. Делимость натуральных чисел. Простые и составные числа. Разложение натурального числа на простые множители

Делителем натурального числа a называется натуральное число, на которое a делится без остатка.

► **Пример 1.** Число 12 имеет делители: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Число 1 является делителем любого натурального числа.

Натуральное число называется **простым**, если оно имеет только два делителя: единицу и само это число.

Число, имеющее более двух делителей, называется **составным**.

► **Пример 2.** Числа 2, 3, 11, 23 — простые числа; числа 4, 8, 15, 27 — составные.

Признак делимости произведения нескольких чисел: если хотя бы один из множителей делится на некоторое число, то и произведение делится на это число.

► **Пример 3.** Произведение $24 \cdot 15 \cdot 77$ делится на 12, поскольку множитель этого числа 24 делится на 12.

Признак делимости суммы (разности) чисел: если каждое слагаемое делится на некоторое число, то и вся сумма делится на это число.

Если $a:b$ и $c:b$, то $(a+c):b$.

Здесь a , b и c — натуральные числа, знак «:» — делится.

► **Пример 4.** Число $(77+99):11$, поскольку $77:11$ и $99:11$.

Если $a:b$, а c не делится на b , то $a+c$ не делится на число b .

► **Пример 5.** $21:3$, а 22 не делится на 3 . Это значит, что $(21+22)$ не делится на 3 .

► **Пример 6.** Исходя из того, что $25:5$ и $(25+15):5$, делаем вывод, что $15:5$.

Если $a:c$ и $c:b$, то $a:b$.

► **Пример 7.** Исходя из того, что $72:24$ и $24:12$, делаем вывод, что $72:12$.

Представление числа в виде произведения степеней простых чисел называют разложением числа на простые множители.

Основная теорема арифметики: любое натуральное число (кроме 1) либо является простым, либо его можно разложить на простые множители только одним способом.

При разложении числа на простые множители используют *признаки делимости* и применяют запись «столбиком», при которой делитель располагается справа от вертикальной черты, а частное записывают под делимым.

► **Пример 8.** Разложить на простые множители числа: а) 330; б) 1197.

Решение:

$$\begin{array}{r|l} \text{а) } 330 & 2 \quad 330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11; \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \text{б) } 1197 & 3 \quad 1197 = 3^2 \cdot 7 \cdot 19. \\ 399 & 3 \\ 133 & 7 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array}$$

1.1.5. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10

Делится на	Признак делимости	Примеры
2	Число делится на 2, если его последняя цифра делится на 2	$27\ 374:2$ $27\ 371$ не делится на 2
3	Число делится на 3, если сумма его цифр делится на 3	$27\ 375:3$, поскольку $2+7+3+7+5=24$. $24:3$
5	Число делится на 5, если его последняя цифра 0 или 5	$23\ 330:5$ $10\ 745:5$ $48\ 377$ не делится на 5
9	Число делится на 9, если сумма его цифр делится на 9	$488\ 718:9$, поскольку $4+8+8+7+1+8=36$. $36:9$
10	Число делится на 10, если его последняя цифра 0	$270:10$ 272 не делится на 10

Признаки делимости на 4, 25 и 11

Делит-ся на	Признак делимости	Примеры
4	Число делится на 4, если число, составленное из двух его последних цифр, делится на 4	27 032:4, поскольку 32:4
25	Число делится на 25, если число, составленное из двух его последних цифр, делится на 25	3 300, 3 725, 48 375, 3 150 делятся на 25
11	Число делится на 11, если алгебраическая сумма его цифр $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_{n-1}$ делится на 11	38 137:11, поскольку $3 - 8 + 1 - 3 + 7 = 0$. 0:11

Существуют признаки делимости на 6, 15, 45 и т. д., т. е. на числа, произведение которых можно разложить на множители 2, 3, 5, 9 и 10.

- ▶ **Пример 1.** Признак делимости на 6 может выглядеть так: на 6 делятся те и только те числа, сумма цифр которых делится на 3 и их последняя цифра делится на 2.
- ▶ **Пример 2.** Указать наибольшее натуральное число, делящееся на 5 и удовлетворяющее неравенству:
а) $128 < x < 145$; б) $1157 < x \leq 1160$.
Ответ: а) 140; б) 1160.
- ▶ **Пример 3.** На одной стоянке 26 автомобилей, на другой — на 1 больше, а на третьей — в 2 раза больше, чем на первой. Можно ли все автомобили разместить поровну на трех стоянках?
Ответ: можно, поскольку общее число автомобилей: $26 + (26 + 7) + 26 \cdot 2 = 111$. $111:3$, т. к. $1+1+1 = 3:3$.

1.1.6. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное

Наибольшее натуральное число, на которое делится нацело каждое из двух данных натуральных чисел, называется **наибольшим общим делителем** этих чисел (НОД).

- ▶ **Пример 1.** НОД (10; 25) = 5; НОД (18; 24) = 6; НОД (7; 21) = 1.

Если наибольший общий делитель двух натуральных чисел равен 1, то эти числа называются **взаимно простыми**.

Алгоритм нахождения наибольшего общего делителя (НОД)

Действие	Пример. Найдите НОД (180; 840)
1. Разложить данные числа на простые множители	$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ $840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
2. Выписать все простые числа, которые входят в каждое из полученных разложений	$\text{НОД}(180; 840) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

Действие	Пример. Найти НОД (180; 840)
Каждое из выписанных простых чисел взять с наименьшим из показателей степени, с которыми оно входит в разложение данных чисел	
3. Записать произведение полученных степеней	НОД (180;840) = $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

► **Пример 2.** Найти НОД (132; 180; 144).

Решение:

132 2	180 2	144 2
66 2	90 2	72 2
33 3	45 3	36 2
11 11	15 3	18 2
1	5 5	9 3
	1	3 3
		1

$$132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11; \quad 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5; \quad 144 = 2^4 \cdot 3^2$$

$$\text{НОД (132; 180; 144)} = 2^2 \cdot 3 = 12.$$

Ответ: 12.

► **Пример 3.** Между учениками одного класса поделили поровну 155 тетрадей и 62 ручки. Сколько учеников в этом классе?

Решение:

Нахождение количества учащихся этого класса сводится к нахождению наибольшего общего делителя чисел 155 и 62, поскольку тетради и ручки поделили поровну.

$$155 = 5 \cdot 31; \quad 62 = 2 \cdot 31. \quad \text{НОД (155; 62)} = 31.$$

Ответ: 31 ученик.

Кратным натурального числа a называется натуральное число, которое делится на a без остатка.

► **Пример 4.** Число 8 имеет кратные: 8, 16, 24, 32, ... Любое натуральное число имеет бесконечно много кратных.

Наименьшим общим кратным (НОК) чисел называется наименьшее натуральное число, которое кратно этим числам.

Алгоритм нахождения наименьшего общего кратного (НОК)

Действие	Пример. Найти НОК (84; 90)
1. Разложить числа на простые множители	$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$
2. Вычислить все простые числа, которые входят хотя бы в одно из разложений. Каждое из выписанных простых чисел взять с наибольшим показателем степени, с которым оно входит в разложения данных чисел	НОК (84; 90) = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

Действие	Пример. Найти НОК (84; 90)
3. Записать произведение полученных степеней	НОК (84; 90) = 1260

► **Пример 5.** Найти НОК (18; 24; 30).

Решение:

$$18 = 2 \cdot 3^2; 24 = 2^3 \cdot 3; 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

$$\text{НОК (18; 24; 30)} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 8 \cdot 9 \cdot 5 = 360.$$

► **Пример 6.** Два велосипедиста одновременно стартовали по велотреку в одном направлении. Один делает круг за 1 мин, а другой — за 45 с. Через какое наименьшее количество минут после начала движения они встретятся на старте? Сколько кругов по велотреку сделает каждый из них?

Решение:

Количество минут, через которое они снова встретятся на старте, должно делиться и на 1 мин, и на 45 с. 1 мин = 60 с. Таким образом, необходимо найти НОК (45; 60). $45 = 3^2 \cdot 5$; $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. $\text{НОК (45; 60)} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 4 \cdot 9 \cdot 5 = 180$. Значит, велосипедисты встретятся на старте через 180 с = 3 мин, при этом первый сделает $180 : 60 = 3$ круга, а второй — $180 : 45 = 4$ круга.

Ответ: 3 мин; 3 круга, 4 круга.

1.1.7. Деление с остатком

Если натуральное число a не делится нацело на натуральное число b , можно выполнить **деление с остатком**. При этом полученное частное называется **неполным**. Справедливо равенство:

$$a = b \cdot n + r,$$

где a — делимое, b — делитель, n — неполное частное, r — остаток.

► **Пример 1.** Пусть делимое равно 243, делитель — 4, тогда $243 : 4 = 60$ (остаток 3). То есть $a = 243$, $b = 4$, $n = 60$, $r = 3$, тогда $243 = 60 \cdot 4 + 3$.

Числа, которые делятся на 2 без остатка, называются **четными**:

$$a = 2n, n \in \mathbb{N}.$$

Остальные числа называются **нечетными**:

$$b = 2n + 1, n \in \mathbb{N}.$$

1.2. Дроби

1.2.1. Обыкновенная дробь, основное свойство дроби. Сравнение дробей

Одна или несколько равных частей единицы называются **обыкновенной дробью**.

► **Пример 1.** Дробь $\frac{3}{7}$ означает, что единицу разделили на 7 частей и взяли 3 таких части.

Дробь можно рассматривать и как результат деления натуральных чисел. Частное от деления натуральных чисел a и b можно записать в виде дроби $\frac{a}{b}$, где делимое a — **числитель**, а делитель b — **знаменатель**.

Дробь, в которой числитель меньше знаменателя, называется **правильной**, а дробь, где числитель больше или равен знаменателю, — **неправильной**.

► **Пример 2.** Дроби $\frac{3}{7}$; $\frac{9}{10}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{123}{124}$ — правильные, дроби $\frac{7}{7}$; $\frac{8}{3}$; $\frac{16}{1}$ — неправильные.

Число, состоящее из целой и дробной частей, можно **обратить в неправильную дробь**. Для этого нужно умножить целую часть на знаменатель и к произведению прибавить числитель данной дроби. Полученная сумма будет числителем дроби, а знаменателем остается знаменатель дробной части.

► **Пример 3.** $5\frac{1}{3} = \frac{5 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{16}{3}$; $8\frac{9}{10} = \frac{8 \cdot 10 + 9}{10} = \frac{89}{10}$.

Из любой **неправильной дроби можно выделить целую часть**. Для этого нужно разделить с остатком числитель на знаменатель. Частное от деления — это *целая часть*, остаток — это *числитель*, делитель — это *знаменатель*.

► **Пример 4.** $\frac{23}{4} = [23 : 4 = 5 \text{ (ост. 3)}] = 5\frac{3}{4}$; $\frac{7}{3} = [7 : 3 = 2 \text{ (ост. 1)}] = 2\frac{1}{3}$.

Основное свойство дроби: если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится дробь, равная данной.

Основное свойство дроби используют при сокращении дробей.

Деление числителя и знаменателя на их общий делитель, отличный от единицы, называют **сокращением дробей**.

► **Пример 5.** Наибольшим общим делителем дроби $\frac{225}{275}$ является число 25, поэтому дробь можно сократить на это число: $\frac{225}{275} = \frac{225 : 25}{275 : 25} = \frac{9}{11}$.

Сокращение дробей можно проводить поэтапно с помощью признаков делимости.

► **Пример 6.** $\frac{48}{60} = \frac{48 : 2}{60 : 2} = \frac{24}{30} = \frac{24 : 2}{30 : 2} = \frac{12}{15} = \frac{12 : 3}{15 : 3} = \frac{4}{5}$.

Сравнение дробей

1. Из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше та, у которой числитель больше.

► **Пример 7.** $\frac{3}{11} < \frac{5}{11}$; $\frac{2}{37} > \frac{1}{37}$; $\frac{11}{101} < \frac{9}{101}$.

2. Из двух дробей с одинаковыми числителями больше та, у которой знаменатель меньше.

► **Пример 8.** $\frac{5}{7} < \frac{5}{6}$; $\frac{11}{35} < \frac{11}{20}$; $\frac{31}{45} > \frac{31}{46}$.

Чтобы сравнить дроби с разными числителями и знаменателями, нужно:

- 1) привести дроби к наименьшему общему знаменателю;
- 2) сравнить полученные дроби.

Чтобы привести дроби к наименьшему общему знаменателю, нужно:

- 1) найти наименьшее общее кратное знаменателей дробей (оно и будет их общим знаменателем);
- 2) разделить общий знаменатель на знаменатель данных дробей, т. е. найти для каждой дроби дополнительный множитель;
- 3) умножить числитель и знаменатель каждой дроби на ее дополнительный множитель.

► **Пример 9.** Сравнить дроби: а) $\frac{2}{7}$ и $\frac{3}{5}$; б) $\frac{7}{18}$ и $\frac{11}{27}$.

Решение:

а) НОК (7; 5) = 35. $\frac{2}{7} = \frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{10}{35}$; $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{21}{35}$; так как $\frac{10}{35} < \frac{21}{35}$, то $\frac{2}{7} < \frac{3}{5}$;

б) НОК (18; 27) = 54; $\frac{7}{18} = \frac{7 \cdot 3}{18 \cdot 3} = \frac{21}{54}$; $\frac{11}{27} = \frac{11 \cdot 2}{27 \cdot 2} = \frac{22}{54}$; так как $\frac{21}{54} < \frac{22}{54}$, то $\frac{7}{18} < \frac{11}{27}$.

1.2.2. Арифметические действия с обыкновенными дробями

Сложение и вычитание дробей

1. При сложении (вычитании) дробей с одинаковыми знаменателями к числителю первой дроби прибавляют числитель второй дроби (из числителя первой вычитают числитель второй) и оставляют тот же знаменатель. Полученную дробь, если возможно, сокращают и выделяют целую часть.

► **Пример 1.**

а) $\frac{7}{12} - \frac{3}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$;

б) $\frac{9}{11} + \frac{2}{11} = \frac{11}{11} = 1$;

в) $2\frac{3}{17} + 5\frac{4}{17} = (2 + 5) + \frac{3 + 4}{17} = 7\frac{7}{17}$;

г) $4\frac{10}{13} + 2\frac{5}{13} = 6\frac{15}{13} = 6 + \frac{13}{13} + \frac{2}{13} = 7\frac{2}{13}$;

д) $7\frac{11}{15} - 2\frac{4}{15} = (7 - 2) + \frac{11 - 4}{15} = 5\frac{7}{15}$;

е) $8\frac{3}{22} - 5\frac{7}{22} = (8 - 5) + \frac{3 - 7}{22} = 3 + \frac{3 - 7}{22} = 2 + \frac{22}{22} + \frac{3 - 7}{22} = 2\frac{22 + 3 - 7}{22} = 2\frac{18}{22} = 2\frac{9}{11}$.

2. При сложении (вычитании) дробей с разными знаменателями нужно предварительно привести эти дроби к наименьшему общему знаменателю, затем

сложить (вычесть) полученные дроби, используя правило сложения (вычитания) дробей с одинаковыми знаменателями.

► **Пример 2.**

$$\text{а) } 5\frac{7}{8} + 6\frac{3}{10} = 5 + 6 + \frac{5/7}{8} + \frac{4/3}{10} = 11 + \frac{35 + 12}{40} = 11 + \frac{47}{40} = 11 + \frac{40}{40} + \frac{7}{40} = 12 + \frac{7}{40} = 12\frac{7}{40};$$

$$\text{б) } 3\frac{9}{11} - 1\frac{2}{5} = 3 - 1 + \frac{5/9}{11} - \frac{11/2}{5} = 2 + \frac{45 - 22}{45} = 2\frac{23}{45};$$

$$\text{в) } 5\frac{1}{4} - 1\frac{3}{8} = 5 - 1 + \frac{2/1}{4} - \frac{3}{8} = 4 + \frac{2 - 3}{8} = 3 + \frac{8}{8} - \frac{1}{8} = 3\frac{7}{8};$$

$$\text{г) } 7\frac{7}{9} - 4\frac{1}{12} + 2\frac{3}{4} = 7 - 4 + 2 + \frac{4/7}{9} - \frac{3/1}{12} + \frac{9/3}{4} = 5 + \frac{28 - 3 + 27}{36} = 5 + \frac{52}{36} = 5 + \frac{13}{9} = 5 + \frac{9}{9} + \frac{4}{9} = 6\frac{4}{9}.$$

Умножение дробей

1. Произведение двух дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ равно дроби, числитель которой равен произведению числителей, а знаменатель — произведению знаменателей:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

2. При умножении чисел, состоящих из целой и дробной частей, их предварительно представляют в виде неправильных дробей, а затем умножают согласно п. 1.

► **Пример 3.**

$$\text{а) } \frac{7}{12} \cdot 24 = \frac{7}{12} \cdot \frac{24}{1} = \frac{7 \cdot \cancel{24}^2}{\cancel{12}^1 \cdot 1} = \frac{14}{1} = 14;$$

$$\text{б) } \frac{13}{24} \cdot \frac{16}{39} = \frac{\cancel{13}^1 \cdot \cancel{16}^2}{\cancel{24}^3 \cdot \cancel{39}^3} = \frac{2}{9};$$

$$\text{в) } 19\frac{1}{2} \cdot 1\frac{5}{9} = \frac{19 \cdot 2 + 1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 9 + 5}{9} = \frac{\cancel{39}^{13} \cdot \cancel{14}^7}{\cancel{2}^1 \cdot \cancel{9}^3} = \frac{91}{3} = 30\frac{1}{3};$$

$$\text{г) } 2\frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{24} \cdot 5\frac{2}{5} = \frac{\cancel{8}^1 \cdot \cancel{25}^1 \cdot \cancel{27}^9}{\cancel{3}^1 \cdot \cancel{24}^3 \cdot \cancel{25}^1} = \frac{9}{3} = 3;$$

$$\text{д) } \left(\frac{3}{7}\right)^3 = \frac{27}{343};$$

$$\text{е) } \left(3\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{13}{4}\right)^2 = \frac{169}{16} = 10\frac{9}{16}.$$

Деление дробей

Два числа называются **взаимно обратными**, если их произведение равно 1, т. е. дроби вида $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$ являются взаимно обратными, например $\frac{1}{3}$ и 3; $\frac{2}{7}$ и $\frac{7}{2}$.

Чтобы разделить одну дробь на другую, нужно делимое умножить на число, обратное к делителю:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

$$1 : \frac{a}{b} = \frac{b}{a};$$

$$0 : \frac{a}{b} = 0;$$

$\frac{a}{b} : 0$ — на нуль делить нельзя

При делении чисел, состоящих из целой и дробной части, нужно предварительно представить их в виде дроби и применить правило согласно п. 1.

Пример 4.

$$\text{а) } \frac{21}{40} : \frac{3}{4} = \frac{\cancel{21}^7 \cdot \cancel{4}^1}{\cancel{40}^{10} \cdot \cancel{3}^1} = \frac{7}{10};$$

$$\text{б) } 8 : \frac{3}{5} = \frac{8}{1} \cdot \frac{5}{3} = \frac{40}{3} = 13 \frac{1}{3};$$

$$\text{в) } \frac{12}{25} : 4 = \frac{12}{25} : \frac{4}{1} = \frac{\cancel{12}^3 \cdot 1}{25 \cdot \cancel{4}^1} = \frac{3}{25};$$

$$\text{г) } 5 \frac{1}{3} : 1 \frac{5}{9} = \frac{16}{3} : \frac{14}{9} = \frac{\cancel{16}^3 \cdot \cancel{9}^3}{\cancel{3}^2 \cdot \cancel{14}^7} = \frac{24}{7} = 3 \frac{3}{7};$$

$$\text{д) } 3 \frac{3}{8} : \frac{3}{8} : 1 \frac{3}{7} = \frac{27}{8} : \frac{3}{8} : \frac{10}{7} = \frac{\cancel{27}^9 \cdot \cancel{8}^1 \cdot 7}{\cancel{8}^1 \cdot \cancel{3}^1 \cdot 10} = \frac{63}{10} = 6 \frac{3}{10}.$$

1.2.3. Нахождение части от целого и целого по его части

Нахождение части от целого (дроби от числа)

Чтобы найти **часть от целого**, нужно число, соответствующее целому, разделить на знаменатель дроби, выражающей эту часть, и результат умножить на числитель той же дроби.

Пример 1. На участке растет 36 деревьев. Из них $\frac{5}{9}$ — вишни. Сколько вишен растет на участке?

Решение:

1) $36 : 9 = 4$ (деревя) — это $\frac{1}{9}$ всех деревьев; 2) $4 \cdot 5 = 20$ (деревьев) — это $\frac{5}{9}$ всех деревьев.

Ответ: 20 деревьев.

Задача нахождения части от целого по существу является задачей нахождения **дроби от числа**.

Чтобы найти **дробь (часть) от числа**, необходимо число **умножить** на эту дробь.

► **Пример 2.** Решим предыдущую задачу умножением числа 36 на дробь $\frac{5}{9}$.

Решение:

$$36 \cdot \frac{5}{9} = \frac{36 \cdot 5}{9} = 20 \text{ (деревьев).}$$

Ответ: 20 деревьев.

► **Пример 3.** Среди 420 000 жителей города $\frac{1}{6}$ часть жителей не интересуется футболом и не смотрит футбольные матчи по телевизору. Остальные являются футбольными болельщиками. Среди болельщиков $\frac{5}{7}$ смотрит по телевизору финальный матч чемпионата Европы. Сколько жителей города не смотрело этот матч?

Решение:

1) $420\,000 \cdot \frac{1}{6} = 70\,000$ (жителей) — не интересуются футболом;

2) $420\,000 - 70\,000 = 350\,000$ (жителей) — футбольные болельщики;

3) $350\,000 \cdot \frac{5}{7} = 250\,000$ (жителей) — смотрели матч;

4) $420\,000 - 250\,000 = 170\,000$ — не смотрели матч.

Ответ: 170 000 человек.

Нахождение целого по его части (числа по его дроби)

Чтобы найти **целое по его части**, нужно число, соответствующее этой части, разделить на числитель дроби, выражающей эту часть, и результат умножить на знаменатель той же дроби.

► **Пример 4.** За первый день лыжники прошли 38 км, что составляет $\frac{2}{7}$ длины маршрута. Какова длина маршрута?

Решение:

1) $38 : 2 = 19$ (км) — это $\frac{1}{7}$ всего маршрута;

2) $19 \cdot 7 = 133$ (км) — длина маршрута.

Ответ: 133 км.

Задача нахождения целого по его части по существу является задачей **нахождения числа по его дроби**.

Чтобы найти **число по его дроби**, необходимо данное значение **разделить** на эту дробь.

► **Пример 5.** Решим предыдущую задачу делением числа 38 на $\frac{2}{7}$.

Решение:

$$38 : \frac{2}{7} = \frac{38 \cdot 7}{2} = 133 \text{ (км).}$$

Ответ: 133 км.

► **Пример 6.** Трое мышей нашли головку сыра. Одна мышь съела $\frac{7}{12}$ головки сыра,

другая — $\frac{7}{15}$ остатка, а третья — остальные $1\frac{2}{3}$ кг сыра. Найти массу головки сыра.