



В. И. Вербицкий

# МАТЕМАТИКА



Москва  
2019

УДК 373.167.1:51  
ББК 22.1я7  
В31

**Вербицкий, Виктор Ильич.**

В31 Математика / В.И. Вербицкий. – Москва : Эксмо, 2019. – 224 с. – (Карманный справочник).

ISBN 978-5-699-73321-7

Справочник содержит краткий и самый необходимый теоретический материал по математике. Приводятся наглядные схемы и таблицы, удобные для запоминания и быстрого поиска материала.

Издание адресовано учащимся старших классов для подготовки к урокам, различным формам текущего и промежуточного контроля, а также ГИА и ЕГЭ.

**УДК 373.167.1:51  
ББК 22.1я7**

ISBN 978-5-699-73321-7

© Вербицкий В.И., 2014  
© Оформление. ООО «Издательство «Эксмо», 2019

# СОДЕРЖАНИЕ

## 1. Алгебра

<b>1.1. Числа, корни и степени</b> .....	9
1.1.1. Целые числа .....	9
1.1.2. Степень с натуральным показателем .....	14
1.1.3. Дроби, проценты, рациональные числа .....	15
1.1.4. Степень с целым показателем .....	23
1.1.5. Корень степени $n > 1$ и его свойства .....	24
1.1.6. Степень с рациональным показателем и её свойства ...	25
1.1.7. Свойства степени с действительным показателем. ...	27
<b>1.2. Основы тригонометрии</b> .....	28
1.2.1. Синус, косинус, тангенс, котангенс произвольного угла .....	28
1.2.2. Радианная мера угла .....	31
1.2.3. Синус, косинус и тангенс числа .....	33
1.2.4. Основные тригонометрические тождества .....	34
1.2.5. Формулы приведения .....	36
1.2.6. Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов. ...	37
1.2.7. Синус и косинус двойного угла .....	39
<b>1.3. Логарифмы</b> .....	41
1.3.1. Логарифм числа .....	41
1.3.2. Логарифмы произведения, частного, степени .....	42
1.3.3. Десятичный и натуральный логарифмы, число $e$ .....	44
<b>1.4. Преобразования выражений</b> .....	45
1.4.1. Преобразования выражений, включающих арифметические операции .....	45
1.4.2. Преобразование выражений, включающих операцию возведения в степень .....	47
1.4.3. Преобразование выражений, включающих корни натуральной степени .....	49
1.4.4. Преобразования тригонометрических выражений. ...	51
1.4.5. Преобразования выражений, включающих операцию логарифмирования .....	54
1.4.6. Модуль (абсолютная величина) числа .....	55

## 2. Уравнения и неравенства

2.1. Уравнения	57
2.1.1. Квадратные уравнения	57
2.1.2. Рациональные уравнения	59
2.1.3. Иррациональные уравнения	60
2.1.4. Тригонометрические уравнения	62
2.1.5. Показательные уравнения	71
2.1.6. Логарифмические уравнения	73
2.1.7. Равносильность уравнений, систем уравнений	75
2.1.8. Простейшие системы уравнений с двумя неизвестными	75
2.1.9. Основные приёмы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных	76
2.1.10. Использование свойств и графиков функций при решении уравнений	78
2.1.11. Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений с двумя переменными и их систем	79
2.1.12. Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений	80
2.2. Неравенства	82
2.2.1. Квадратные неравенства	82
2.2.2. Рациональные неравенства	83
2.2.3. Показательные неравенства	86
2.2.4. Логарифмические неравенства	87
2.2.5. Системы линейных неравенств	89
2.2.6. Системы неравенств с одной переменной	90
2.2.7. Равносильность неравенств, систем неравенств	91
2.2.8. Использование свойств и графиков функций при решении неравенств	92
2.2.9. Метод интервалов	93

2.2.10. Изображение на координатной плоскости множества решений неравенств с двумя переменными и их систем .....	95
<b>3. Функции</b>	
<b>3.1. Определение и график функции</b> .....	97
3.1.1. Функция, область определения функции .....	97
3.1.2. Множество значений функции .....	98
3.1.3. График функции. Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях .....	99
3.1.4. Обратная функция. График обратной функции .....	100
3.1.5. Преобразования графиков, параллельный перенос, симметрия относительно осей координат .....	102
<b>3.2. Элементарное исследование функций</b> .....	105
3.2.1. Монотонность функций. Промежутки возрастания и убывания .....	105
3.2.2. Чётность и нечётность функций .....	106
3.2.3. Периодичность функций .....	107
3.2.4. Ограниченность функций .....	109
3.2.5. Точки экстремума (локального максимума и минимума) функции .....	109
3.2.6. Наибольшее и наименьшее значения функции .....	111
<b>3.3. Основные элементарные функции</b> .....	112
3.3.1. Линейная функция, её график .....	112
3.3.2. Функция, описывающая обратную пропорциональную зависимость, её график .....	113
3.3.3. Квадратичная функция, её график .....	114
3.3.4. Степенная функция с натуральным показателем, её график .....	117
3.3.5. Тригонометрические функции, их графики .....	118
3.3.6. Показательная функция, её график .....	121
3.3.7. Логарифмическая функция, её график .....	121
<b>4. Начала математического анализа</b>	
<b>4.1. Производная</b> .....	123
4.1.1. Понятие о производной функции, геометрический смысл производной .....	123

4.1.2. Физический смысл производной, нахождение скорости протекания процесса, заданного формулой или графиком .....	124
4.1.3. Уравнение касательной к графику функции .....	125
4.1.4. Производные суммы, разности, произведения, частного .....	126
4.1.5. Производные основных элементарных функций .....	128
4.1.6. Вторая производная и её физический смысл .....	128
<b>4.2. Исследование функций</b> .....	129
4.2.1. Применение производной к исследованию функций и построению графиков. ....	129
4.2.2. Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических задачах .....	131
<b>4.3. Первообразная и интеграл</b> .....	133
4.3.1. Первообразные элементарных функций .....	133
4.3.2. Примеры применения интеграла в физике и геометрии .....	135

## **5. Геометрия**

<b>5.1. Планиметрия</b> .....	137
5.1.1. Треугольник .....	137
5.1.2. Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат. ....	146
5.1.3. Трапеция .....	150
5.1.4. Окружность и круг. ....	153
5.1.5. Окружность, вписанная в треугольник, и окружность, описанная около треугольника .....	158
5.1.6. Многоугольник. Сумма углов выпуклого многоугольника .....	160
5.1.7. Правильные многоугольники. Вписанные и описанные окружности правильного многоугольника .....	161
<b>5.2. Прямые и плоскости в пространстве</b> .....	163
5.2.1. Пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые. Перпендикулярность прямых .....	163

---

5.2.2. Параллельность прямой и плоскости, признаки и свойства . . . . .	165
5.2.3. Параллельность плоскостей, признаки и свойства . . .	167
5.2.4. Перпендикулярность прямой и плоскости, признаки и свойства; перпендикуляр и наклонная; теорема о трёх перпендикулярах. . . . .	169
5.2.5. Перпендикулярность плоскостей, признак и свойства . . . . .	173
5.2.6. Параллельное проектирование. Изображение пространственных фигур. . . . .	174
<b>5.3. Многогранники . . . . .</b>	<b>176</b>
5.3.1. Призма, её основания, боковые рёбра, высота, боковая поверхность; прямая призма; правильная призма . . . . .	176
5.3.2. Параллелепипед; куб; симметрии в кубе, параллелепипеде. . . . .	178
5.3.3. Пирамида, её основания, боковые рёбра, высота, боковая поверхность; треугольная пирамида, правильная пирамида . . . . .	179
5.3.4. Сечения куба, призмы, пирамиды . . . . .	180
5.3.5. Представление о правильных многогранниках (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр). . . . .	182
<b>5.4. Тела и поверхности вращения . . . . .</b>	<b>183</b>
5.4.1. Цилиндр. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развёртка. . . . .	183
5.4.2. Конус. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развёртка. . . . .	184
5.4.3. Шар и сфера, их сечения. . . . .	185
<b>5.5. Измерение геометрических величин. . . . .</b>	<b>186</b>
5.5.1. Величина угла, градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной дуги окружности. . . . .	186
5.5.2. Угол между прямыми в пространстве; угол между прямой и плоскостью. . . . .	187
5.5.3. Длина отрезка, ломаной, окружности, периметр многоугольника . . . . .	189

5.5.4. Расстояние от точки до прямой, от точки до плоскости; расстояние между параллельными прямыми, параллельными плоскостями . . . . .	190
5.5.5. Площадь треугольника, параллелограмма, трапеции, круга, сектора . . . . .	192
5.5.6. Площадь поверхности конуса, цилиндра, сферы . . . . .	194
5.5.7. Объём куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара. . . . .	195
<b>5.6. Координаты и векторы . . . . .</b>	<b>198</b>
5.6.1. Декартовы координаты на плоскости и в пространстве . . . . .	198
5.6.2. Формула расстояния между двумя точками; уравнение сферы . . . . .	199
5.6.3. Вектор, модуль вектора, равенство векторов, сложение векторов, умножение вектора на число. . . . .	200
5.6.4. Коллинеарные векторы; разложение вектора по двум неколлинеарным векторам . . . . .	203
5.6.5. Компланарные векторы; разложение вектора по трём некопланарным векторам . . . . .	204
5.6.6. Координаты вектора; угол между векторами; скалярное произведение векторов . . . . .	206
<b>6. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей</b>	
<b>6.1. Элементы комбинаторики . . . . .</b>	<b>209</b>
6.1.1. Поочерёдный и одновременный выбор . . . . .	209
6.1.2. Формулы числа сочетаний, размещений и перестановок. Бином Ньютона. . . . .	212
<b>6.2. Элементы статистики . . . . .</b>	<b>215</b>
6.2.1. Табличное и графическое представление данных . . . . .	215
6.2.2. Числовые характеристики рядов данных. . . . .	217
<b>6.3. Элементы теории вероятностей . . . . .</b>	<b>219</b>
6.3.1. Вероятности событий . . . . .	219
6.3.2. Примеры использования вероятностей и статистики при решении прикладных задач . . . . .	221



# АЛГЕБРА

## 1.1. Числа, корни и степени

### 1.1.1. Целые числа

**Целыми числами** называют натуральные числа, т. е. числа, используемые для счёта (1; 2; 3; ...), нуль (0) и числа, противоположные натуральным (-1; -2; -3; ...).

Множество натуральных чисел обозначается  $\mathbb{N}$ , множество целых чисел —  $\mathbb{Z}$ .

Натуральное число, не равное единице, называется *простым*, если оно делится только на себя и на единицу. Натуральное число, отличное от единицы и не являющееся простым, называется *составным*.

Любое составное натуральное число можно разложить на простые множители.

Число 1 (единица) не относится ни к простым, ни к составным числам.

**Пример 1.** Разложить на простые множители:

а) 18; б) 37; в) 360.

*Решение:* а)  $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2$ ;

б) 37 — простое число, т. е.  $37 = 37 \cdot 1$ ;

в) 360 можно разложить на простые множители делением «в столбик» так:

$$\begin{array}{r|l}
 360 & 2 \\
 180 & 2 \\
 90 & 2 \\
 45 & 3, \text{ т. е. } 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5. \\
 15 & 3 \\
 5 & 5 \\
 1 & 
 \end{array}$$

**Наименьшее общее кратное** натуральных чисел  $n_1; n_2; \dots; n_k$  ( $\text{НОК}\{n_1; n_2; \dots; n_k\}$ ) — это наименьшее натуральное число, которое делится на все указанные числа без остатка.

**Наибольший общий делитель** ( $\text{НОД}\{n_1; n_2; \dots; n_k\}$ ) — это наибольшее натуральное число, на которое делятся без остатка все указанные числа.

Для нахождения НОК и НОД следует разложить каждое из чисел на простые множители.

Числа  $m$  и  $n$  называются взаимно простыми, если  $\text{НОД}\{m; n\} = 1$

НОК равно произведению всех образовавшихся простых чисел, каждое из которых

возводится в наибольшую из степеней, в которых оно входит в разложения. НОД равен произведению всех простых множителей, общих для всех чисел, каждый из которых возведён в наименьшую из степеней, в которых оно входит в разложения. Если общих простых множителей нет, то НОД равен 1.

**Пример 2.** Вычислить: а) НОК{12; 108; 162};  
б) НОД{12; 108; 162}.

*Решение:*

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \text{ , т. е. } 12 = 2^2 \cdot 3;$$

$$\begin{array}{r|l} 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \text{ , т. е. } 108 = 2^2 \cdot 3^3;$$

$$\begin{array}{r|l} 162 & 2 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \text{ , т. е. } 162 = 2 \cdot 3^4.$$

а)  $\text{НОК}\{12; 108; 162\} = 2^2 \cdot 3^4 = 324;$

б)  $\text{НОД}\{12; 108; 162\} = 2 \cdot 3 = 6.$

Ответ: а) 324; б) 6.

### Свойства действий над целыми числами

<b>Свойства сложения</b>	
$m + n = n + m$	переместительное свойство
$(m + n) + l = m + (n + l)$	сочетательное свойство
$n + 0 = n$	свойство нуля
$m + (-m) = 0$	сумма противоположных чисел
<b>Свойства вычитания</b>	
$m - (n + l) = m - n - l$	вычитание суммы чисел от числа
$(m + n) - l = (m - l) + n = m + (n - l)$	вычитание числа от суммы чисел
$m - 0 = m$	свойство нуля

$0 - m = -m$	свойство нуля
<b>Свойства умножения</b>	
$mn = nm$	переместительное свойство
$(mn)l = m(nl)$	сочетательное свойство
$(m+n)l = ml + nl$	распределительное свойство
$(m-n)l = ml - nl$	распределительное свойство
$m \cdot 1 = m$	свойство единицы
$m \cdot 0 = 0$	свойство нуля
$m \cdot \frac{1}{m} = 1$ , если $m \neq 0$	свойство обратных чисел
<b>Свойства деления</b>	
$(m \cdot n) : l =$ $= m \cdot (n : l) =$ $= (m : l) \cdot n$	деление произведения на число

$(m+n):l = m:l+n:l$	деление суммы на число
$(m-n):l = m:l-n:l$	деление разности на число
$m:(n \cdot l) = (m:n):l = (m:l):n$	деление числа на произведение
<del><math>m:0</math></del>	делить на нуль нельзя!

### 1.1.2. Степень с натуральным показателем

$n$ -й натуральной степенью числа  $a$  называется число  $b$ , полученное в результате умножения числа  $a$  на себя  $n$  раз:

$$a^n = b = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}$$

По определению  $a^1 = a$ .

$$\begin{aligned} (-a)^n &= a^n, \\ &\text{если } n \text{ — чётное;} \\ (-a)^n &= -a^n, \\ &\text{если } n \text{ — нечётное.} \end{aligned}$$

Число  $a$  называется *основанием степени*,  $n$  — *показателем степени*.

**Пример.** Вычислить:

а)  $(-5)^3$ ; б)  $(-3)^4$ ; в)  $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ ; г)  $\left(2\frac{3}{5}\right)^2$ .

*Решение:* а)  $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$ ;

б)  $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$ ;

в)  $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$ ;

г)  $2\frac{3}{5} = \frac{13}{5}$ ;  $\left(2\frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{13}{5}\right)^2 = \frac{169}{25} = 6\frac{19}{25}$ .

*Ответ:* а)  $-125$ ; б)  $81$ ; в)  $\frac{8}{27}$ ; г)  $6\frac{19}{25}$ .

### 1.1.3. Дроби, проценты, рациональные числа

**Рациональное число** — это дробь вида  $\frac{m}{n}$ , где  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Число  $m$  называется *числителем*,  $n$  — *знаменателем*.

Дробь  $\frac{m}{n}$  называется *несократимой*, если  $m$  и  $n$  взаимно просты. В противном случае дробь можно сократить, разделив числитель и знаменатель на их НОД. Например:

$$\frac{8}{12} = \frac{2^3}{2^2 \cdot 3} = \frac{2^2 \cdot 2}{2^2 \cdot 3} = \frac{2}{3}.$$